

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ИНГУШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

СОГЛАСОВАНА

УТВЕРЖДАЮ

Руководитель образовательной программы
факультета

Декан физико-математического

_____/проф. И.А.Танкиев
«27» апреля 2026г.

_____/М.Х.Мальсагов от
от «28» апреля 2026г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.ДВ.06.02 ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Направление подготовки

01.03.01 – МАТЕМАТИКА

Квалификация выпускника

БАКАЛАВР

Форма обучения

Очная

Магас 2026

1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины (модуля) «Гармонический анализ» являются:

- формирование у обучающихся системы фундаментальных знаний о гармоническом анализе, рядах и преобразованиях Фурье, их свойствах и применениях;
- развитие навыков применения методов гармонического анализа к задачам математической физики, обработки сигналов и теории функций;
- подготовка будущего учителя математики к использованию методов гармонического анализа в научной и профессиональной деятельности;
- формирование компетенций, необходимых для решения прикладных задач с использованием рядов и преобразований Фурье.

Задачи изучения дисциплины:

- изучить теорию тригонометрических рядов Фурье, преобразования Фурье и интеграла Фурье;
- сформировать навыки разложения функций в ряды Фурье и применения преобразования Фурье;
- развить умения применять методы гармонического анализа к решению дифференциальных уравнений и задач математической физики;
- подготовить к использованию полученных знаний в педагогической деятельности и при изучении смежных дисциплин.

Для дисциплин, формирующих профессиональные компетенции:

Формируемые дисциплиной знания и умения готовят выпускника данной образовательной программы к выполнению следующих обобщенных трудовых функций (трудовых функций) в соответствии с Профессиональным стандартом «Педагог (педагогическая деятельность в сфере дошкольного, начального общего, основного общего, среднего общего образования) (воспитатель, учитель)» (приказ Министерства труда и социальной защиты Российской Федерации от 18 октября 2013 г. № 544н, код профессионального стандарта – 01.001):

Код	Наименование обобщенной трудовой функции / трудовой функции
А/01.6	Общепедагогическая функция. Обучение
А/03.6	Развивающая деятельность
В/03.6	Педагогическая деятельность по реализации программ основного и среднего общего образования

2. Место дисциплины в структуре ОПОП бакалавриата

Дисциплина **Б1.В.06 «Гармонический анализ»** относится к части, формируемой участниками образовательных отношений, Блока 1 «Дисциплины (модули)» ОПОП.

Логическая и содержательно-методическая взаимосвязь с другими элементами ОПОП:

Дисциплина опирается на знания, умения и навыки, полученные студентами при изучении следующих предшествующих дисциплин:

- «Математический анализ»;
- «Линейная алгебра»;
- «Дифференциальные уравнения»;
- «Теория функций действительной переменной»;
- «Функциональный анализ».

Требования к «входным» знаниям, умениям и готовностям обучающегося:

Обучающийся должен:

- **Знать:** теорию рядов; интегральное исчисление; основы дифференциальных уравнений.
- **Уметь:** исследовать сходимость рядов; вычислять интегралы.
- **Владеть:** навыками аналитических преобразований.

Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины необходимо как предшествующее:

- «Уравнения математической физики»;
- «Интегральные уравнения»;
- «Обработка сигналов»;
- «Подготовка к итоговой государственной аттестации».

3. Результаты освоения дисциплины (модуля)

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование элементов следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО по данному направлению:

Код компетенции	Наименование компетенции	Индикатор достижения компетенции (закрепленный за дисциплиной)	В результате освоения дисциплины обучающийся должен:
УК-1	Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 – Анализирует функции, выделяя их гармонический состав.	Знать: основные понятия гармонического анализа; свойства рядов и преобразований Фурье.
		УК-1.4 – Синтезирует различные методы для выбора оптимального.	Уметь: применять методы гармонического анализа к задачам.
		УК-1.5 – Критически оценивает полученные решения.	Владеть: навыками разложения функций в ряды Фурье и применения преобразования Фурье.

ПК-1	Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач	ПК-1.1 – Демонстрирует знание гармонического анализа.	Знать: теоретические основы гармонического анализа.
		ПК-1.2 – Применяет методы гармонического анализа для решения профессиональных задач.	Уметь: решать задачи с использованием рядов Фурье и преобразования Фурье.

4. Структура и содержание дисциплины (модуля)

4.1. Структура дисциплины (модуля)

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетные единицы, 108 часов.

№ п/п	Наименование разделов и тем дисциплины (модуля)	Семестр	Всего	Лекции	Практика	СРС	Формы контроля
1	Раздел 1. Введение в гармонический анализ	8	14	4	4	6	Собеседование
	Тема 1.1. Исторический обзор. Основные понятия.	8	6	2	2	2	
	Тема 1.2. Тригонометрическая система функций.	8	8	2	2	4	
2	Раздел 2. Ряды Фурье	8	28	8	10	10	Проверка контрольных работ
	Тема 2.1. Коэффициенты Фурье. Ряд Фурье.	8	8	2	3	3	
	Тема 2.2. Сходимость рядов	8	10	3	3	4	

	Фурье. Теорема Дирихле.						
	Тема 2.3. Ряды Фурье для чётных и нечётных функций. Комплексная форма.	8	10	3	4	3	
3	Раздел 3. Преобразование Фурье	8	24	6	8	10	Проверка контрольных работ
	Тема 3.1. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье.	8	8	2	3	3	
	Тема 3.2. Свойства преобразования Фурье. Свертка.	8	8	2	3	3	
	Тема 3.3. Обратное преобразование Фурье.	8	8	2	2	4	
4	Раздел 4. Дискретное преобразование Фурье	8	20	6	8	6	Проверка реферата
	Тема 4.1. Дискретная тригонометрическая система.	8	8	2	3	3	
	Тема 4.2. Дискретное преобразование Фурье (ДПФ).	8	6	2	2	2	
	Тема 4.3. Быстрое преобразование Фурье (БПФ).	8	6	2	3	1	
5	Раздел 5. Применение гармонического анализа	8	18	4	6	8	Проверка реферата
	Тема 5.1. Применение к	8	8	2	3	3	

	решению дифференциальны х уравнений.						
	Тема 5.2. Применение к обработке сигналов.	8	10	2	3	5	
	Подготовка к зачету с оценкой	8	—	—	—	4	—
	Зачет с оценкой	8	—	—	—	—	—
ИТОГ О			108	28	36	44	

4.2. Содержание дисциплины (модуля)

Раздел 1. Введение в гармонический анализ

Тема 1.1. Исторический обзор. Основные понятия.

История развития гармонического анализа. Понятие гармонического колебания. Частота, амплитуда, фаза. Разложение периодических функций.

Тема 1.2. Тригонометрическая система функций.

Ортогональность тригонометрических функций. Скалярное произведение в функциональных пространствах. Ортонормированные системы.

Раздел 2. Ряды Фурье

Тема 2.1. Коэффициенты Фурье. Ряд Фурье.

Определение коэффициентов Фурье для функции, заданной на отрезке $[-\pi, \pi]$. Ряд Фурье. Примеры разложения.

Тема 2.2. Сходимость рядов Фурье. Теорема Дирихле.

Достаточные условия сходимости ряда Фурье. Теорема Дирихле. Сходимость в среднем. Равенство Парсеваля.

Тема 2.3. Ряды Фурье для чётных и нечётных функций. Комплексная форма.

Разложение по синусам и косинусам. Комплексная форма ряда Фурье.

Раздел 3. Преобразование Фурье

Тема 3.1. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье.

Переход от ряда Фурье к интегралу Фурье. Определение преобразования Фурье. Примеры вычисления.

Тема 3.2. Свойства преобразования Фурье. Свертка.

Линейность. Дифференцирование. Сдвиг. Масштабирование. Свертка и её преобразование Фурье.

Тема 3.3. Обратное преобразование Фурье.

Формула обращения. Теорема Планшереля. Сохранение энергии.

Раздел 4. Дискретное преобразование Фурье

Тема 4.1. Дискретная тригонометрическая система.

Ортогональность дискретной системы. Периодические последовательности.

Тема 4.2. Дискретное преобразование Фурье (ДПФ).

Определение ДПФ. Матричная форма. Свойства.

Тема 4.3. Быстрое преобразование Фурье (БПФ).

Алгоритм БПФ. Сложность вычислений. Применение.

Раздел 5. Применение гармонического анализа**Тема 5.1. Применение к решению дифференциальных уравнений.**

Решение волнового уравнения. Решение уравнения теплопроводности. Метод Фурье.

Тема 5.2. Применение к обработке сигналов.

Спектральный анализ сигналов. Фильтрация. Сжатие данных (JPEG).

5. Образовательные технологии

№ п/п	Образовательная технология	Описание применения	Темы (разделы)
1	Проблемное обучение	Решение задач на сходимость рядов	Разделы 2, 3
2	Работа в малых группах	Групповое решение задач	Разделы 3, 4
3	Информационно-коммуникационные технологии	Использование математических пакетов	Раздел 5

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины**6.1. План самостоятельной работы студентов**

№ нед	Тема	Вид самостоятельной работы	Задание	Рекомендуемая литература	Количество часов
1	Тема 1.1. Введение	Изучение материала	Изучить историю гармонического анализа	[1], [2]	2
2	Тема 1.2. Тригонометрическая система	Изучение материала	Изучить ортогональность функций	[1], [2]	4
3	Тема 2.1. Коэффициенты Фурье	Решение задач	Вычислить коэффициенты Фурье	[1], [3]	3
4	Тема 2.2. Сходимость	Решение задач	Исследовать сходимость рядов	[1], [3]	4
5	Тема 2.3. Чётные и нечётные	Решение задач	Разложить функции в	[1], [3]	3

			ряды по синусам и косинусам		
6	Тема 3.1. Преобразование Фурье	Решение задач	Вычислить преобразование Фурье	[1], [4]	3
7	Тема 3.2. Свойства	Решение задач	Применить свойства	[1], [4]	3
8	Тема 3.3. Обратное преобразование	Решение задач	Найти обратные преобразования	[1], [4]	4
9	Тема 4.1. Дискретная система	Изучение материала	Изучить дискретную ортогональность	[1], [5]	3
10	Тема 4.2. ДПФ	Решение задач	Вычислить ДПФ	[1], [5]	2
11	Тема 4.3. БПФ	Изучение материала	Изучить алгоритм БПФ	[1], [5]	1
12	Тема 5.1. Уравнения	Решение задач	Решить уравнения методом Фурье	[1], [6]	3
13	Тема 5.2. Обработка сигналов	Изучение материала	Изучить спектральный анализ	[1], [6]	5
14	Подготовка к зачету	Повторение	Подготовка к зачету	Все источники	4

6.2. Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

Изучение теоретического материала. Рекомендуется систематически изучать теоретический материал, обращая внимание на условия применимости теорем.

Решение задач. Самостоятельное решение задач является основным видом внеаудиторной работы.

6.3. Материалы для проведения текущего и промежуточного контроля знаний студентов

Контроль освоения компетенций

№ п/п	Вид контроля	Контролируемые темы (разделы)	Компетенции, компоненты которых контролируются
1	Собеседование	Раздел 1	УК-1, ПК-1
2	Проверка	Разделы 2, 3	УК-1, ПК-1

	контрольных работ		
3	Проверка реферата	Разделы 4, 5	УК-1, ПК-1
4	Зачет с оценкой	Все разделы	УК-1, ПК-1

7. Учебно-методическое и материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

7.1. Учебная литература

Основная литература:

1. Толстов, Г. П. Ряды Фурье / Г. П. Толстов. – Москва : Наука, 2024.
2. Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – Москва : Лаборатория знаний, 2024.
3. Зигмунд, А. Тригонометрические ряды / А. Зигмунд. – Москва : Мир, 2024.
4. Ильин, В. А. Основы математического анализа / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – Москва : Наука, 2024.
5. Марпл, С. Л. Цифровой спектральный анализ / С. Л. Марпл. – Москва : Мир, 2024.
6. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – Москва : Наука, 2024.

7.2. Интернет-ресурсы

1. Math-Net.Ru – общероссийский математический портал.
2. eLibrary.ru – научная электронная библиотека.

7.3. Программное обеспечение

№	Наименование ПО	Назначение
1	Windows / Linux	Базовое ПО
2	Microsoft Office / LibreOffice	Оформление документов
3	Математические пакеты	Вычисления ДПФ

7.4. Материально-техническое обеспечение

№	Оборудование	Количество	Назначение
1	Мультимедийная аудитория	1	Проведение лекций
2	Проектор / интерактивная доска	1	Демонстрация материалов
3	Компьютерный класс	1	Практические занятия
4	Доска для записей	1	Решение задач

1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы

№ раздела	Название раздела	Формируемые компетенции	Этап формирования
1	Введение	УК-1, ПК-1	Начальный
2	Ряды Фурье	УК-1, ПК-1	Основной
3	Преобразование Фурье	УК-1, ПК-1	Основной
4	ДПФ	УК-1, ПК-1	Основной
5	Применение	УК-1, ПК-1	Завершающий

2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Таблица 2. Сопоставление шкал оценивания

Традиционная шкала	Балльно-рейтинговая шкала	Уровень сформированности компетенции
«отлично»	86–100	высокий
«хорошо»	71–85	средний
«удовлетворительно»	56–70	пороговый
«неудовлетворительно»	0–55	не сформирована

Таблица 3. Оценивание ответа на вопросы по темам для устного ответа

Критерий	Описание	Баллы (макс. 10)
Полнота и глубина ответа	Полное понимание вопроса, развернутый ответ	3
Логичность и аргументированность	Структурированность, обоснованность выводов	2
Умение применять знания	Иллюстрация теории примерами	3
Качество речи и владение материалом	Свободное владение материалом, корректная терминология	2

Таблица 4. Оценивание подготовки рефератов

Критерий	Баллы (макс. 10)
Соответствие теме и глубина раскрытия	3
Структура и логика	2
Использование источников	2
Оригинальность и самостоятельность	2
Оформление	1

Таблица оценивания зачета

Критерий	Баллы (макс. 20)
----------	------------------

Знание теоретического материала	5
Умение применять ряды и преобразования Фурье	5
Обоснование решения	4
Качество устного ответа	3
Дополнительные вопросы	3

Шкала перевода баллов за зачет: 17–20 = «отлично»; 13–16 = «хорошо»; 10–12 = «удовлетворительно»; 0–9 = «неудовлетворительно».

3. Материалы для проведения текущего контроля знаний и промежуточной аттестации

Вопросы для собеседования и коллоквиума:

1. Ортогональность тригонометрических функций.
2. Коэффициенты Фурье. Ряд Фурье.
3. Теорема Дирихле о сходимости ряда Фурье.
4. Ряды Фурье для чётных и нечётных функций.
5. Комплексная форма ряда Фурье.
6. Равенство Парсеваля.
7. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье.
8. Свойства преобразования Фурье.
9. Свертка и её преобразование Фурье.
10. Обратное преобразование Фурье. Теорема Планшереля.
11. Дискретное преобразование Фурье (ДПФ).
12. Быстрое преобразование Фурье (БПФ).
13. Применение гармонического анализа к дифференциальным уравнениям.
14. Спектральный анализ сигналов.

Практические задания:

Задание 1. Разложение в ряд Фурье.

Разложить в ряд Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции:

1. $f(x) = x$
2. $f(x) = x^2$
3. $f(x) = |x|$
4. $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases}$
5. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}$
6. $f(x) = \cos x$

7. $f(x) = \sin x$
8. $f(x) = e^x$
9. $f(x) = x(\pi - x)$
10. $f(x) = \sin^2 x$

Задание 2. Сходимость рядов Фурье.

1. Показать, что ряд Фурье для $f(x) = x$ на $[-\pi, \pi]$ сходится к самой функции в точках непрерывности.
2. Найти сумму ряда Фурье функции $f(x) = x^2$ в точке $x = 0$.
3. Используя равенство Парсеваля, вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
4. Используя равенство Парсеваля, вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Задание 3. Преобразование Фурье.

Найти преобразование Фурье функций:

1. $f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$ (прямоугольный импульс)
2. $f(t) = e^{-at}, t > 0$
3. $f(t) = e^{-a|t|}$
4. $f(t) = \frac{1}{t^2 + a^2}$
5. $f(t) = e^{-t^2/2}$
6. $f(t) = \cos \omega_0 t$
7. $f(t) = \sin \omega_0 t$
8. $f(t) = \delta(t)$ (дельта-функция)

Задание 4. Свойства преобразования Фурье.

1. Доказать, что преобразование Фурье свертки двух функций равно произведению их преобразований.
2. Найти преобразование Фурье производной функции $f'(t)$.
3. Найти преобразование Фурье функции $f(at)$ (масштабирование).

Задание 5. Дискретное преобразование Фурье.

1. Вычислить ДПФ для последовательности $[1, 0, -1, 0]$.
2. Вычислить ДПФ для последовательности $[1, 1, 1, 1]$.
3. Вычислить ДПФ для последовательности $[1, 2, 3, 4]$.
4. Найти обратное ДПФ для результатов вычислений.

Задание 6. Применение к дифференциальным уравнениям.

1. Методом Фурье решить уравнение теплопроводности на отрезке с нулевыми граничными условиями.
2. Методом Фурье решить волновое уравнение на отрезке.

3. С помощью преобразования Фурье решить уравнение теплопроводности на прямой.
4. С помощью преобразования Фурье решить волновое уравнение на прямой.

Зачет с оценкой

Пример билета:

Билет № 1

1. Ряды Фурье. Коэффициенты Фурье. Теорема Дирихле.
2. Преобразование Фурье: определение, свойства, обратное преобразование.
3. Применение гармонического анализа к решению дифференциальных уравнений.

Практическое задание: Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x^2$ на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Лист изменений рабочей программы

Учебный год	Решение кафедры (№ протокола, дата)	Внесенные изменения	Подпись зав. кафедрой
----------------	--	------------------------	--------------------------

Рабочая программа дисциплины **Б1.В.ДВ.06.02 ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ** составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки **01.03.01 Математика** (уровень высшего образования бакалавриат), утвержденного Приказом Министерства образования и науки РФ от 10 января 2018 г. N 8 "Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта высшего образования - бакалавриат по направлению подготовки 01.03.01 Математика" (с изменениями и дополнениями) (Редакция с изменениями N 1456 от 26.11.2020, С изменениями и дополнениями от: 26 ноября 2020 г., 8 февраля 2021 г.), с учетом профессионального стандарта 01Образование и наука, утвержденного приказом Министерства труда и социальной защиты Российской Федерации от «5» августа 2021 г. № 30550

Протокол № 8 от «27» апреля 2026г

Программа одобрена Учебно-методическим советом физико-математического факультета Протокол № 6 от «28» апреля 2026 г